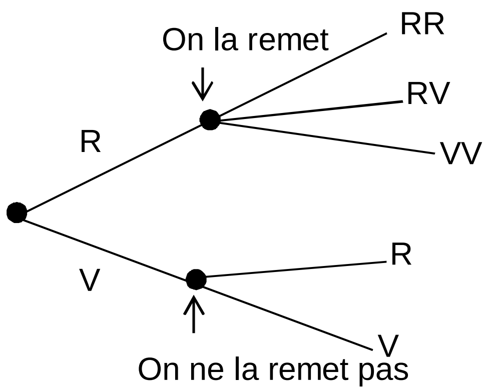
C O R R I G E

EXERCICE 1

Urne: 3V, 4R

On tire au hasard une boule.



□ : La boule tirée au premier tirage est rouge
□ : Les boules tirées au deuxième tirage sont rouges
□ : Les boules tirées au deuxième tirage sont vertes
□ : La boule tirée au deuxième tirage est rouge

1) $□(□) = \frac{□□}{□□} = \frac{□}{□}$ **(0,25 point)**

$□(□/□) = \frac{□□}{□□} = \frac{\frac{□□□}{□}}{\frac{□□□}{□}} = \frac{□}{□}$ **(0,25 point)**

$□(□/□) = \frac{□□}{□□} = \frac{□□□}{□□□} = \frac{□}{□}$ **(0,25 point)**

$□(□/\bar{□}) = \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **(0,5 point)**

2) a) Ne pas avoir de boule rouge au deuxième tirage signifie avoir exactement une boule verte ou exactement deux boules vertes.
Soit □ cet événement.

$□(□) = \frac{□}{□} \times \frac{□□}{□□} + \frac{□}{□} \times \frac{□□}{□□} = □\frac{□}{\frac{□□□}{□}} \times \frac{□}{□}□ + □\frac{□}{□} \times \frac{□}{□}□ = \frac{□}{□□} + \frac{□}{□} = \frac{□□}{□□}$ **(0,5 point)**

b) Soit □ l'événement avoir deux boules rouges au deuxième tirage

$□(□) = \frac{□}{□} \times \frac{□□}{□□} = \frac{□}{□} \times \frac{□}{□□} = \frac{□}{□□}$ **(0,5 point)**

3) Soit X correspondant au nombre de boules rouges tirées au deuxième tirage.

$$\boxed{X(\Omega) = \{0, 1, 2\}}$$

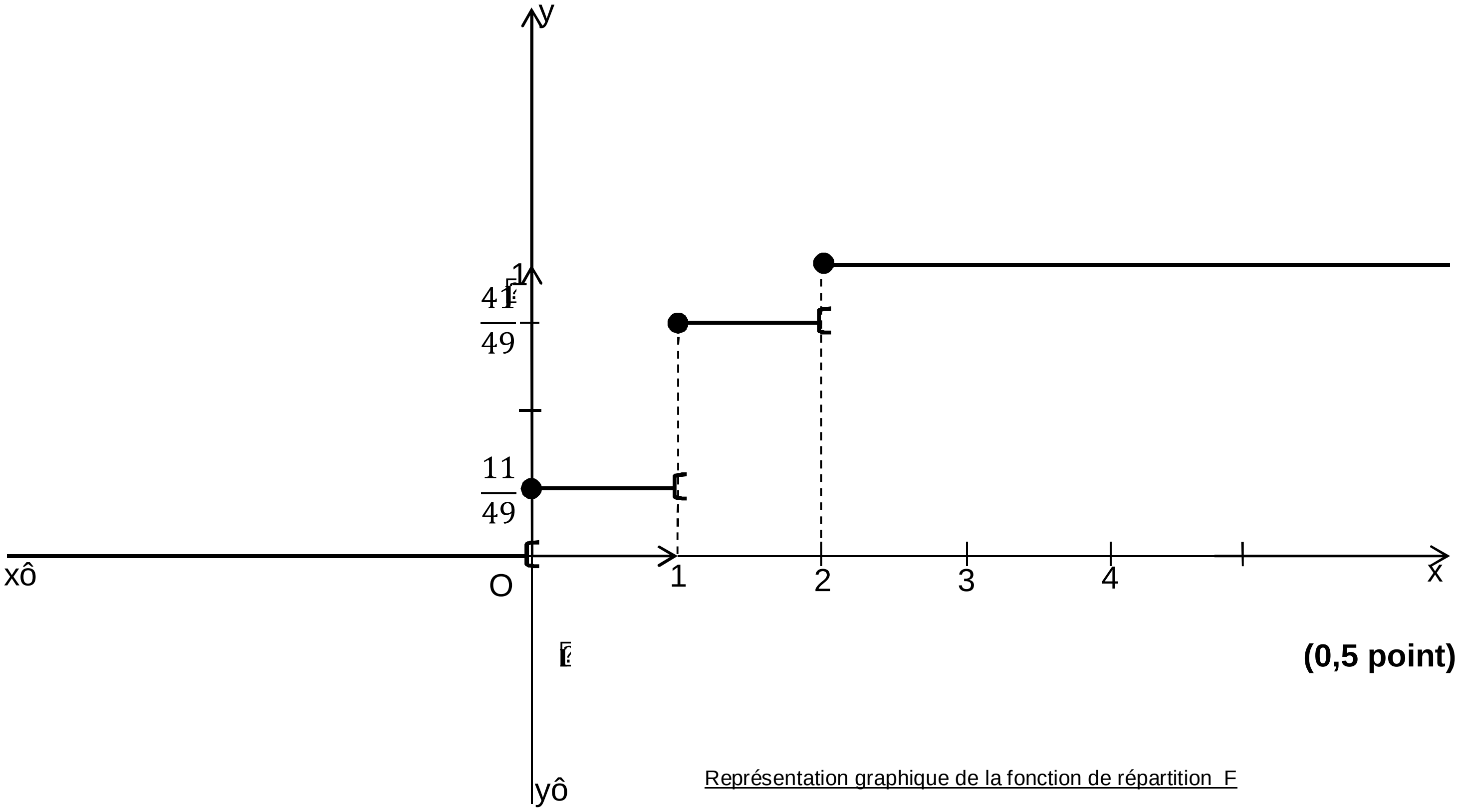
Loi de probabilité de X:

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{49}$	$\frac{30}{49}$	[illegible]

(0,5 point)

4) Soit F la fonction de répartition de X.

- Si $x < 0$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(\phi) = 0$
- Si $x \in [0; 1[$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{11}{49} \simeq 0{,}22$
- Si $x \in [1,; 2[$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{41}{49} \simeq 0{,}81$
- Si $x \geq 2$ alors $F(x) = P(\Omega) = 1$. **(0,5 point)**



(0,5 point)

Représentation graphique de la fonction de répartition F

EXERCICE 2

A) $f(x) = 1 - $ [illegible]

1) $f(1) = 0$ **(0,25 point)**
2) $D_f =]0 ; +\infty[$

Limites

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ **(0,25 point + 0,25 point)**

Continuité et dérivabilité de g

$x \longmapsto 1-x^2$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0,+\infty[$
$x \longmapsto -\ln x$ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$
[illegible] $x \longmapsto 1-x^2-\ln x$ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ **(0,5 point)**

Dérivée de g

$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = \frac{-2x^2-1}{x}$

Signe de $g'(x)$ et sera de variation de g.

$g'(x)$ a le même signe que $-2x^2-1$ sur $]0,+\infty[$
Or $-2x^2-1 < 0$ pour tout réel x
D'où $g'(x) < 0$ sur $]0,+\infty[$
$\Rightarrow g$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. **(0,5 point)**

Tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

(0,5 point)

3) D'après le tableau de variations de g et la question 1)
Sur $]0,+\infty[$ $g(x) > 0$
et sur $]1,+\infty[$ $g(x) < 0$ **(0,5 point)**

B) $f(x) = 2-x+\frac{\ln x}{x}$

1) f est définie si et seulement si $x > 0$
$D_f =]0\,;+\infty[$ **(0,25 point)**

Limites :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ **(0,25 point + 0,25 point)**

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$.

Continuité et dérivabilité de f

$x \longmapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$

$x \longmapsto x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0\,;+\infty[$

[illegible] $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ (1)

De même $x \longmapsto 2-x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. **(0,5 point)**

Dérivée de f :

$f'(x) = -1 + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{1-x^2-\ln x}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. **(0,5 point)**

Signe de f'(x) et sens de variations de f :

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ $f'(x) = \frac{1-x^2-\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ a le même signe que g.

Sur $]0\,;1[$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $]0\,;1[$ **(0,25 point)**

Sur $]1\,;+\infty[$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$. **(0,25 point)**

$f'(1) = \frac{g(1)}{1} = 0 \Rightarrow f'$ s'annule en 1.

Tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = 2-1+\frac{0}{1} = 1$

(0,5 point)

3) a) Démontrons que la droite (Δ) d'équation y = - x + 2 est une asymptote à la courbe de f.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left[2-x+\frac{\ln x}{x}+x-2\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$$

$\Rightarrow (\Delta) : y = -x+2$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$. **(0,25 point)**

b) Position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ).

- $f(x)-y = \frac{\ln x}{x} > 0$ si et seulement si $x > 1$ donc sur $]1\,;+\infty[$ $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (Δ).
- $f(x)-y = \frac{\ln x}{x} < 0$ si et seulement si $x \in]0,1[$ donc sur $]0,1[$ $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de (Δ)
- $f(x)-y = 0$ si et seulement si $x = 1$ donc $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) se coupent au point d'abscisse 1.

(0,25 point)

4) Soit A $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ le point où la tangente est parallèle à (Δ).

Alors on a $f'(x_0) = -1 \Rightarrow \dfrac{g(x_0)}{x_0^2} = -1$ avec $x_0 > 0$

D'où $g(x_0) = -x_0^2, \quad x_0 > 0$

$\Rightarrow 1 - x_0^2 - \ln x_0 = -x_0^2, \quad x_0 > 0$

$\Rightarrow \ln x_0 = 1, \quad x_0 > 0$

$\Rightarrow x_0 = e, \quad x_0 > 0$

D'où $x_0 = e$ et $f(e) = 2 - e + \dfrac{1}{e}$

$\Rightarrow \boxed{A \begin{pmatrix} e \\ 2 - e + \frac{1}{e} \end{pmatrix}}$ **(0,5 point)**

5) Courbe $(\mathcal{C}f)$ voir papier millimétré.

EXERCICE 3

$\mathcal{P}$ complexe muni $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :
$z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0 \quad (E)$
Soit $ib,\ b \in \mathbb{R}$. ib est solution imaginaire pure si et seulement si :

$$-ib^3 + 2b^2 + 2ib^2 + 2ib - 4b - 4i = 0$$
$$(-b^3 + 2b^2 + 2b - 4)i + 2b^2 - 4b = 0$$

C'est-à-dire $\begin{cases} 2b^2 - 4b = 0 \\ -b^3 + 2b^2 + 2b - 4 = 0 \end{cases}$ C'est-à-dire $\begin{cases} 2b(b-2) = 0 \\ -b^3 + 2b^2 + 2b - 4 = 0 \end{cases}$

C'est-à-dire $\begin{cases} b = 0 \text{ ou } b = 2 \\ -b^3 + 2b^2 + 2b - 4 = 0 \quad (*) \end{cases}$

Si $b = 0$ alors $(*)$ devient $-4 = 0$ ce qui est impossible.
Si $b = 2$ alors $(*)$ devient $-8 + 8 + 4 - 4 = 0$ ce qui est vrai
Donc $z = 2i$ est la solution imaginaire pure.

Ainsi on a

$$\begin{array}{l|l} z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i & z - 2i \\ \hline -(z^3 - 2iz^2) & z^2 - 2z + 2 \\ -2z^2 + 2(1+2i)z - 4i & \\ -(-2z^2 + 4iz) & \\ 2z - 4i & \\ -(2z - 4i) & \\ 0 & \end{array}$$

D'où l'équation devient (E) devient :

$$(z - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0$$
$$(z - 2i) = 0 \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0$$

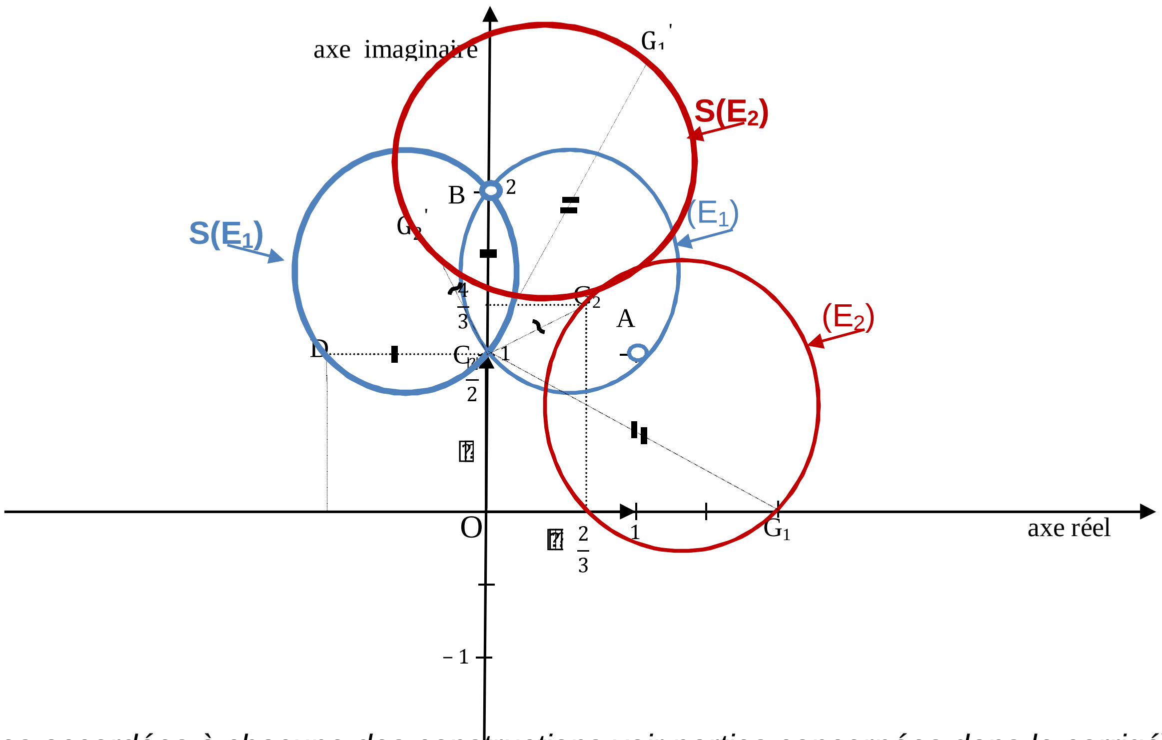
$z - 2i = 0 \Rightarrow \boxed{z = 2i}$

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$
$$\Delta' = 1 - 2 = i^2$$

$\boxed{z_1 = 1 - i}$ ou $\boxed{z_2 = 1 + i}$

$\boxed{S = \{2i;\ 1 - i;\ 1 + i\}}$ **(0,75 point)**

2) Soient $A(1+i)$, $B(2i)$ et $C(i)$.
Plaçons les points A, B et C dans le repère suivant : **(0,25 point)**



(*Notes accordées à chacune des constructions voir parties concernées dans le corrigé*).

3) Soit $z \neq 1+i$

$z \mapsto z' = \dfrac{z-2i}{z-1-i}$

a) ● Interprétation graphique $|z'|$

Soit M le point d'affixe z avec $z \neq 1+i$ $(M \neq A)$

$$|z'| = \left|\frac{z-2i}{z-1-i}\right| = \left|\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right| = \frac{|z_M - z_B|}{|z_M - z_A|} = \frac{\|\overrightarrow{BM}\|}{\|\overrightarrow{AM}\|} = \frac{BM}{AM} , \ M \neq A$$

$$\boxed{|z'| = \frac{BM}{AM} , \ M \neq A}$$ **(0,5 point)**

● Interprétation graphique de arg (z')

$$\arg(z') = \arg\left(\frac{z-2i}{z-1-i}\right) = \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \qquad M \neq A$$

$$\boxed{\arg(z') = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})\ [2\pi]} \qquad M \neq A$$

(0,5 point)

b) $E_1 = \{M(z) \in P \ / \ z' \text{ imaginaire pur}\}$

M d'affixe z tel que z' imaginaire pur

z' imaginaire pur $\Rightarrow \arg z' = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\Rightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ $\qquad M \neq A$

$\Rightarrow$ M décrit le cercle de diamètre [AB] privé du point A

(E_1) est le cercle de diamètre [AB] privé du point A **(0,5 point)**

(Construction voir page 7) **(0,25 point)**

c) $E_2 = \{M,\ M(z) \in P \ / \ |z'| = 2\}$

$|z'| = 2$ si et seulement si $\frac{BM}{AM} = 2$ avec $M \neq A$
C'est-à-dire $BM^2 - 4\,AM^2 = 0$, $M \neq A$
Or $BM^2 - 4\,AM^2 = 0$, $M \neq A$

Est équivalent à $(\vec{BM} - 2\vec{AM}).(\vec{BM} + 2\vec{AM}) = 0$ avec $M \neq A$

Soit G_1 barycentre $\{(B,1)\,;\,(A,-2)\}$ G_2 barycentre $\{(B,1)\,;\,(A,2)\}$

$(\vec{BM} - 2\vec{AM}).(\vec{BM} + 2\vec{AM}) = 0$ d'où $-\vec{G_1M}.\,3\vec{G_2M} = 0$

Donc $\vec{G_1M}.\vec{G_2M} = 0$

D'où M décrit le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.
(E_2) est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$. **(0,5 point)**
(Construction voir page 7) **(0,25 point)**

4) S : similitude directe de centre C transformant A en B.

a) $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = |i| = 1$ donc CA = CB (1)

$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ donc $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ (2)

(1) et (2) donnent $\begin{cases} CA = CB \\ (\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc ABC est un triangle rectangle isocèle en C. **(0,5 point)**

b) $\begin{cases} CA = CB \\ (\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Donc S est la rotation de centre C d'angle $\frac{\pi}{2}$ **(0,5 point)**

c) S(E_1) ?
On sait que S(A) = B
Soit D = S(B)
D'où S(E_1) est le cercle de diamètre [BD] privé du point B. **(0,5 point)**
(Construction voir page 7) **(0,5 point)**

S(E_2) ? $S(G_1) = G_1'$ donc $\begin{cases} CG_1 = CG_1' \\ (\vec{CG_1}, \vec{CG_1'}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$S(G_2) = G_2'$ donc $\begin{cases} CG_2 = CG_2' \\ (\vec{CG_2}, \vec{CG_2'}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

D'où S(E_2) est le cercle de diamètre $[G_1'G_2']$ **(0,5 point)**
(Construction voir page 7). **(0,5 point)**

EXERCICE 4

Soit l'équation différentielle: $f'' + 2f' + f = 0$ (E)
On pose $k(x) = e^{-x}\,h(x)$, pour tout reel x.
1) Démontrons que k est solution de (E) si et seulement si $h''(x) = 0$ pour tout réel x

- Supposons que k est solution de (E)
  Alors $k''(x) + 2k'(x) + k = 0$ (α)
  or $k'(x) = e^{-x}(h'(x) - h(x))$ et $k''(x) = e^{-x}(-h'(x) + h(x) + h''(x) - h'(x))$
  $= e^{-x}(h''(x) - 2h'(x) + h(x))$
  D'où (α) devient $e^{-x}(h''(x) - 2h'(x) + h(x) + 2h'(x) - 2h(x) + h(x)) = 0$

D'où $e^{-x}(h''(x)) = 0$
Donc $h''(x) = 0$
Conclusion : si k est solution de (E) alors $h''(x) = 0$ **(0,25 point)**

- Inversement supposons que $h''(x) = 0$ démontrons que k est solution de (E)
  $$k'(x) = e^{-x}(h'(x) - h(x))$$
  $$\text{d'où} \quad k''(x) = e^{-x}(h''(x) - 2h'(x) + h(x))$$
  $$= e^{-x}(-2h'(x) + h(x)) \quad \text{car } h''(x) = 0$$
  Donc $k''(x) + 2k'(x) + k(x) = e^{-x}(-2h'(x) + h(x) + 2h'(x) - 2h(x) + h(x))$
  $$= e^{-x}(0h'(x) + 0h(x)) = 0$$
  D'où $k''(x) + 2k'(x) + k(x) = 0$ donc k est solution de (E).
  Conclusion : si $h''(x) = 0$ alors k est solution de (E) **(0,25 point)**

2) Résolvons l'équation $h''(x) = 0$
   $h''(x) = 0$ si et seulement si $h'(x) = a$, $a \in IR$ d'où $h(x) = ax + b$, a et b appartenant à IR. **(0,25 point)**
3) D'où la solution générale f de (E) est :
   $f(x) = \beta e^{-x}(ax + b)$, avec a, b et β des réels. **(01 point)**

4) Soit F une primitive de f
   On a $F(x) = -\beta(a(x + 1) + b)e^{-x} + \alpha$ (en intégrant par parties ou en utilisant la relation (E)) **(01 point)**